مبرهنة:

إذا كانت H زمرة جزئية من زمرة تبولوجية G فإن $\bar{H}$ تكون أيضاً زمرة جزئية وإذا كانت H ثابتة فإن $\bar{H}$ تكون ثابتة

البرهان:

إذا كانت G زمرة تبولوجية فإن $A\subseteq G$ تكون زمرة جزئية إذا وفقط إذا كان $AA^{-1}\subseteq A$

$\overline{A}\,\overline{B}^{-1}\subseteq\overline{AB^{-1}}$ حسب مبرهنة $\Rightarrow \bar{H}\,\bar{H}^{-1}\subseteq\overline{HH^{-1}}\subseteq\bar{H}$

$\bar{H}\,\bar{H}^{-1}\subseteq\overline{HH^{-1}}$

$HH^{-1}\subseteq H \Rightarrow \overline{HH^{-1}}\subseteq\bar{H}$

أي أن $\bar{H}$ زمرة جزئية من G

بما أن التطبيق $g: G\times G\to G$ ، $(x,y)\to xy^{-1}$ هو مستمر على G فإن g مقصور مستمر على $\bar{H}\times\bar{H}$ باعتبار $\bar{H}$ فضاء تبولوجي جزئي من G وبالتالي فإن $\bar{H}$ زمرة تبولوجية من G

نفرض H ثابتة يكون $a^{-1}Ha=H$ وذلك $\forall a\in G$ ومنه $\overline{a^{-1}Ha}=\bar{H}$ وذلك $\forall a\in G$ ومنه $a^{-1}\bar{H}a=\bar{H}$ وذلك $\forall a\in G$ أي أن $\bar{H}$ ثابتة

ملاحظة:

كذلك انغلاق الزمرة $\{e\}$ ثابتة لأن $a^{-1}\{e\}a=\{e\}$ بالاعتماد على المبرهنة السابقة $\overline{\{e\}}$ ثابتة

مبرهنة:

من أجل أي زمرة جزئية مفتوحة H من زمرة نصف تبولوجية (أو من زمرة تبولوجية) G فإن H تكون مغلقة

البرهان:

من أجل أي عنصر x من G فإن xH تكون مفتوحة في G وبالتالي فإن $\bigcup_{x\notin H} xH$ تكون مفتوحة وبالتالي $G-\bigcup_{x\in H} xH$ تكون مغلقة

علينا أن نبرهن أن $H = G - \bigcup_{x\notin H} xH$

- لتكن $y\in H \Rightarrow y\notin xH$ وذلك $\forall x\notin H$ (لأنه لو كانت خلاف ذلك
لكانت $y\in xH \Rightarrow$ توجد $h\in H$ بحيث $y = xh \Rightarrow x = yh^{-1}\in H$
وهذا تناقض $\Rightarrow y\notin \bigcup_{x\notin H} xH \Rightarrow y\in G-\bigcup_{x\notin H} xH$ ومنه
$H\subseteq G-\bigcup_{x\notin H} xH$

لتكن $y\in G-\bigcup_{x\notin H} xH \Rightarrow y\notin \bigcup_{x\notin H} xH \Rightarrow y\notin xH$ وذلك $\forall x\notin H$

$\Rightarrow y\neq xh\ ,\ \forall x\notin H, \forall h\in H \Rightarrow y\neq xe\quad \forall x\notin H$
$\Rightarrow y\neq x\quad \forall x\notin H \Rightarrow y\in H$ ومنه $G-\bigcup_{x\notin H} xH\subseteq H$
ومن الاحتواءين تنتج المساواة $H = G-\bigcup_{x\notin H} xH$ وبالتالي H مغلقة

مبرهنة:
تكون الزمرة الجزئية H من الزمرة ~~الطبولوجية~~ G مغلقة إذا وفقط إذا كانت من أجل أي جوارة مغلقة U للمحايد e فإن $U\cap H$ تكون مغلقة في G

البرهان:
- إذا كانت H مغلقة فواضح أن $U\cap H$ تكون مغلقة من أجل أي جوارة مغلقة U للمحايد e
- لتكن $U\cap H$ مجموعة مغلقة في G من أجل أي جوارة مغلقة U للمحايد e
لنختار ~~...~~ مجاورة V للمحايد e بحيث يكون ما V^2 (وهذا ممكن حسب مبرهنة سابقة)
لتكن $x\in \bar{H}$ ولتكن $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ شبكة في H متقاربة من $x \Rightarrow x^{-1}\in \bar{H}$
(لأن $\bar{H}$ زمرة جزئية من G)

المجموعة الموجهة: I مجموعة موجهة إذا كانت معرف عليها علاقة ترتيب جزئي (السنية الترتيب العادي) بحيث أنه من أجل أي عنصرين $i, j\in I$ توجد $k\in I$ بحيث يكون $k\geq i$ ، $k\geq j$

وبما أن $Vx^{-1}\cap H\neq \phi$ فإذا أخذنا $y\in Vx^{-1}\cap H$ وبما أن $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ شبكة متقاربة من x و Vx مجاورة للنقطة x حسب تعريف التقارب

فإنه توجد $\alpha_0 \in I$ بحيث يكون من أجل أي $\alpha > \alpha_0$ فإن $x_\alpha \in xV$ وبالتالي

فإنه من أجل $\alpha > \alpha_0$ فإن ~~$y x_\alpha \in V x^{-1} x V$~~

$$y x_\alpha \in V x^{-1} x V = V^2 \subseteq U$$

كما أن $y x_\alpha \in U \cap H$ (لأن y , x_α تنتمي لـ H)

وبما أن الشبكة $(y x_\alpha)_{\alpha \in I}$ من عناصر $U \cap H$ متقاربة من $yx \Leftarrow yx \in \overline{U \cap H}$

ولكن بما أن $U \cap H$ مغلقة فرضاً فإن $yx \in U \cap H \Leftarrow yx \in H$

$\bar{H} \subseteq H$ ومنه $x \in H$ أي أن $x = y^{-1} y x \subseteq H.H = H^2 \subseteq H$

وبالتالي H مغلقة

تمرين:

لتكن G زمرة جبرية. إن المجموعة C المؤلفة من جميع العناصر $a \in G$ والتي تكون تبادلية مع أي عنصر $x \in G$ تدعى مركز G

ونلاحظ أنه إذا كان $a, b \in C$ فإن $ax = xa$ و $bx = xb$ وذلك $\forall x \in G$

$$(ab)x = a(bx) = a(xb) = (ax)b = x(ab) \quad \forall x \in G$$

$$\Rightarrow ab \in C$$

من أجل أي عنصر a من C فإن $ax = xa$ وذلك $\forall x \in G \Leftrightarrow x^{-1} a^{-1} = a^{-1} x^{-1}$

وذلك $\forall x^{-1} \in G^{-1}$ ولكن بما أن G زمرة فإن $G^{-1} = G$ ومنه نستنتج

$x^{-1} a^{-1} = a^{-1} x^{-1}$ وذلك $\forall x^{-1} \in G$ أو $x a^{-1} = a^{-1} x \quad \forall x \in G$

$\Leftarrow a^{-1} \in C$ وبالتالي C تكون زمرة جزئية من G

ويمكن إثبات أيضاً أن C هي زمرة ثابتة في G أي:

$$a^{-1} C a = C \quad \forall a \in G$$

ملاحظة:

لتكن U جوار متناظر للعنصر الحيادي e في الزمرة الطبولوجية G عندئذ فإن $H = \bigcup_{n \geq 1} U^n$ تكون زمرة جزئية مفتوحة ومغلقة في G

البرهان :

ليكن $x, y \in H = \bigcup U^n$ عندئذ يوجد عددان طبيعيان n, m بحيث يكون $x \in U^n$ و $y \in U^m$ ومنه

$H = \bigcup U^n \supseteq U^{n+m} = U^n U^m \ni xy$ ومنه يكون $x \in H = \bigcup U^n \Leftarrow$

$x \in U^n$ فإن $x^{-1} \in (U^n)^{-1} = (U^{-1})^n = U^n \subseteq H$

لأن U متناظرة

$\Leftarrow$ H زمرة جزئية من G

لنبرهن أن H مفتوحة من أجل $y \in H$ فإن $y \in yU \subseteq yH \subseteq H$ أي أن H مجاورة لأي نقطة من نقاطها وبالتالي هي مجموعة مفتوحة وحسب المبرهنة ما قبل الأخيرة تكون H مغلقة (إذا كانت H زمرة جزئية مفتوحة فإنها تكون مغلقة)

مبرهنة :

من أجل أي جوار U للعنصر الحيادي e في زمرة طبولوجية G مترابطة تكون $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} U^n$ (بكلمة أخرى كل زمرة مترابطة تكون مولدة بجوار للعنصر الحيادي)

البرهان :

من المبرهنة السابقة في بحث الزمر الطبولوجية نستنتج أنه يمكن إيجاد جوار V للعنصر الحيادي e بحيث تكون متناظرة ومن المبرهنة الأخيرة نستنتج أن الاجتماع $\bigcup_{n=1}^{\infty} V^n$ تكون زمرة جزئية مفتوحة ومغلقة في G وبما أن G مترابطة فإن $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} V^n \subseteq \bigcup U^n$ (لأنه في الفضاء المترابط تكون المجموعات المفتوحة المغلقة هي إما الفضاء بكامله أو الخالية)

تعريف :

المركبة المترابطة للعنصر x في الفضاء الطبولوجي X هي أكبر مجموعة جزئية مترابطة تحوي x

مبرهنة :

المركبة المترابطة للعنصر الحيادي في زمرة طبولوجية تكون زمرة جزئية مغلقة وناظمية

البرهان:
لتكن C المركبة المترابطة للعنصر الحيادي في الزمرة الطوبولوجية G (من مغلقة لأنها مترابطة) ولنبرهن أنها زمرة جزئية ثابتة.

لتكن $a \in C$ عندئذٍ فإن $a^{-1}C$ مترابطة (لأنها صورة C وفق الهوميومورفيزم $\lambda_{a^{-1}}$)

$$\lambda_{a^{-1}} : G \to G : x \mapsto a^{-1}x \Rightarrow \lambda_{a^{-1}}(C) = a^{-1}C$$

وبما أن $a^{-1}C$ مترابطة وتحوي العنصر e وأن C مركبة مترابطة للعنصر e فإن

$a^{-1}C \subseteq C \quad \forall a \in C \Rightarrow \bigcup_{a \in C} a^{-1}C \subseteq C \Rightarrow C^{-1}C \subseteq C$ أي أن

C زمرة جزئية من G ، الآن من أجل أي $a \in G$ فإن $a^{-1}Ca$

تكون مترابطة (لأنها صورة C وفق التطبيق $f : G \to G$ ، $x \mapsto a^{-1}xa$ هوميومورفيزم)

علماً أن $e \in a^{-1}Ca$ وبما أن C مركبة مترابطة فإن $a^{-1}Ca \subseteq C$ وبنفس

الطريقة نبرهن أن $aCa^{-1} \subseteq C$ ومنه $C \subseteq a^{-1}Ca$ ومن الاحتواءين ينتج

المساواة $a^{-1}Ca = C$ وبالتالي فإن C ثابتة.

ملاحظة:
مركز الزمرة الطوبولوجية الهاوسدورفية G تكون زمرة ثابتة ومغلقة.

البرهان:
من أجل ذلك يكفي أن نبرهن أن المركز C هو مجموعة مغلقة أي لنبرهن أن

لصاقته $\bar{C} \subseteq C$

لتكن $x \in \bar{C}$ ، ولنفرض جدلاً أن $x \notin C \Rightarrow$ عندها يوجد عنصر $a \in G$

بحيث يكون $ax \neq xa$ يوجد عنصر بحيث يكون $x \neq a^{-1}xa$ وبما أن G

هو T_2 فضاء، إذن توجد جوارات u, v للنقطتين x ، $a^{-1}xa$ بحيث

يكون $u \cap v = \phi$ وحسب ملاحظة سابقة يمكن إيجاد جوارين للنقطتين

x ، $a^{-1}xa$ بحيث يكون

$$\left.\begin{aligned} x \in u_1 \subseteq \bar{u}_1 \subseteq u \\ a^{-1}xa \in v_1 \subseteq \bar{v}_1 \subseteq v \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{u}_1 \cap \bar{v}_1 = \phi$$

وبما أن $x \in \bar{C} \Rightarrow x \in u_1 \Rightarrow x \in u_1 \cap \bar{C} \subseteq \overline{u_1 \cap C}$

$$a^{-1}xa \in a^{-1}\,\overline{u_1 \cap C}\,a = \overline{a^{-1}\,u_1 \cap C\,a} = \overline{u_1 \cap C} \subseteq u_1$$

$\bar{a}\, xa \in \bar{U}_1 \;\&\; \bar{V}_1 \cap \bar{U}_1 = \phi$

وهذا تناقض لأن الفرض الجبري خاطئة أي إن $x \in C$ وهذه $\subseteq$ أي إن C مغلقة

زمرة القسمة:

لتكن G زمرة تبولوجية و H زمرة جزئية من G ولتكن $G/H = \{xH ; x \in G\}$
وليكن h التطبيق القانوني من G إلى G/H لنعرف التبولوجي على G/H
بالشكل الآتي: تكون المجموعة $\bar{A} \subseteq G/H$ مفتوحة في G/H إذا وفقط إذا
كانت $h^{-1}(\bar{A})$ مفتوحة في G. إن أسرة المجموعات المفتوحة $\{\bar{A}\}$ تعرف
تبولوجيا على G/H تدعى تبولوجيا القسمة ويكون عندها G/H فضاء تبولوجي
يدعى فضاء القسمة

مبرهنة:

لتكن G زمرة تبولوجية و H زمرة جزئية منها وليكن G/H فضاء القسمة
و h التطبيق القانوني من G إلى G/H عندئذ يكون

1. h غامر
2. h مستمر
3. h مفتوح

البرهان:

1. من التعريف واضح أن h غامر $\quad x \longrightarrow xH \quad G \longrightarrow G/H$
2. من التعريف واضح أن h مستمر
3. (مفتوح يعني الصورة المباشرة لأي مجموعة مفتوحة هي مفتوحة)

نفرض أن A مجموعة مفتوحة في G ولنبرهن $h(A)$ مجموعة مفتوحة في G/H
من أجل ذلك يجب أن نبرهن أن الصورة العكسية $h^{-1}(h(A))$ مفتوحة في G
إن $h^{-1}(h(A)) = AH$ $\qquad h(A) = \{xH ; x \in A\}$
حيث تبين مفتوحة لأن A مفتوحة ⇐ hA مفتوحة ⇐ $HA = \cup hA$